

KONEKTIVITAS-TITIK HASIL KALI KRONECKER DUA GRAF

Evi Anggraini

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: evianggraini@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G_1 dan G_2 dua buah graf. Hasil kali kronecker G_1 dan G_2 , dilambangkan dengan $G_1 \otimes G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / u_1u_2 \in E(G_1) \text{ dan } v_1v_2 \in E(G_2)\}$. Konektivitas-titik graf G atau $\kappa(G)$ adalah minimum banyaknya titik G yang harus dihapus agar graf yang baru tak terhubung atau graf trivial. Konektivitas-titik super dari graf G , dilambangkan dengan $\kappa_s(G)$, adalah minimum banyak titik yang dihapus agar graf yang baru tak terhubung dan tidak memuat titik terasing. Jelas bahwa jika graf G tak terhubung, maka $\kappa(G) = 0$. Penentuan nilai eksak konektivitas-titik dan konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf secara umum merupakan permasalahan yang sulit. Dalam artikel ini akan ditunjukkan bahwa $\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1)$, jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Begitu juga, akan ditunjukkan $\kappa(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G)$, jika G graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$. Dan ditunjukkan juga bahwa $\kappa_s(K_m \otimes K_n) = mn - 4$, jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Akhirnya, dibuktikan bahwa $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$, jika $n \geq 3$, $m \geq 1$, dan $r \geq 1$. Pembahasan ini akan diawali dengan pembuktian bahwa perkalian kronecker dua graf terhubung merupakan graf terhubung jika dan hanya jika salah satu dari kedua graf tersebut memuat siklus ganjil.

Kata Kunci: konektivitas-titik hasil kali kronecker dua graf, konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf untuk beberapa kelas graf tertentu.

Abstract

Let G_1 and G_2 be two graphs. Kronecker product of G_1 and G_2 , denoted by $G_1 \otimes G_2$, is a graph with a set of vertex $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ and a set of edge $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / u_1u_2 \in E(G_1) \text{ dan } v_1v_2 \in E(G_2)\}$. The vertex-connectivity of graph G atau $\kappa(G)$ is the minimum number of vertex G that must be removed so that a new graph is disconnected or a trivial graph. The super connectivity-vertex of graph G , denoted by $\kappa_s(G)$, are the minimum number of vertex removed so that the new graph is disconnected and does not contain isolated vertices. It is clear that if graph G is disconnected, then $\kappa(G) = 0$. Determining the exact value of connectivity-vertex and super connectivity-vertex kronecker products of two graphs is generally a difficult problem. In this paper it will be shown that $\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1)$, if $n \geq m \geq 2$ and $n \geq 3$. Likewise, it will be shown $\kappa(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G)$, if G bipartite graphs with $\kappa(G) = \delta(G)$ and $n \geq 3$. Finally, it is proved that $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$, if $n \geq 3$, $m \geq 1$ and $r \geq 1$. This discussion will begin with proof that the kronecker product of two connected graphs is a connected graph if and only if one of the two graphs contains an odd cycle.

Keywords: connectivity-vertex of two graphs, super connectivity-vertex kronecker products of two graphs for some classes of graph.

1. PENDAHULUAN

Penentuan keterhubungan (konektivitas) pada graf memegang peranan penting dalam merancang suatu jaringan (*network*), karena konektivitas ini menunjukkan reliabilitas atau keajegan dari suatu jaringan. Misalnya

pengaplikasian konektivitas dalam kehidupan sehari-hari yaitu pada suatu jaringan komunikasi. Pusat (sentra atau stasiun) komunikasi berkorespondensi dengan titik pada graf. Sehingga, konektivitas-titik pada graf menyatakan banyaknya sentra yang harus dihancurkan untuk memutus jaringan komunikasi tersebut. Terdapat dua jenis

konektivitas dalam teori graf yaitu konektivitas-titik dan konektivitas-sisi (Budayasa, 2007).

Perkalian dua graf telah banyak diteliti. Pada tahun 1962, P.M. Weichsel tertarik mempelajari konektivitas perkalian kronecker dari dua graf yang terhubung. Marmut dan Vumar (2008) menentukan beberapa parameter kerentanan titik perkalian kronecker dari graf komplet. Guji dan Vumar (2009) mempelajari konektivitas perkalian kronecker dari graf bipartit dan graf komplet. Ada beberapa jenis perkalian dua graf yaitu, perkalian kartesius, perkalian kuat, perkalian leksikografik, dan perkalian kronecker dua graf. Hasil kali kronecker dari dua graf G dan graf H , dilambangkan dengan $G \otimes H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \otimes H) = \{(p, q)(r, s) | pr \in E(G) \text{ dan } qs \in E(H)\}$ (Ekinci & Kirlangiç, 2015). Dalam penentuan nilai eksak konektivitas-titik dan konektivitas-titik super perkalian kronecker dua graf secara umum merupakan permasalahan yang sulit. Dalam skripsi ini akan dibahas konektivitas-titik dan konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf untuk beberapa kelas graf tertentu.

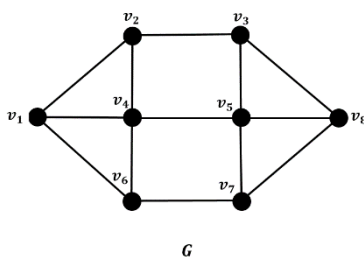
2. KAJIAN TEORI

A. Konektivitas-Titik Hasil Kali Kronecker Dua Graf

Definisi 2.1

Misalkan G graf terhubung dan $V_1 \subset V(G)$. Himpunan V_1 disebut himpunan-titik-pemutus G , jika $G - V_1$ menjadi graf tak terhubung atau graf trivial (K_1). Minimum $|V_1|$ sedemikian hingga V_1 himpunan-titik-pemutus G disebut **konektivitas-titik G** , disimbolkan dengan $\kappa(G)$. Dengan kata lain, konektivitas-titik graf G atau $\kappa(G)$ adalah minimum banyaknya titik G yang harus dihapus agar graf yang baru tak terhubung atau graf trivial. Jelas bahwa jika graf G tak terhubung, maka $\kappa(G) = 0$. Graf G disebut terhubung-titik- k , jika penghapusan sebanyak kurang dari k titik G , menghasilkan graf baru yang tetap terhubung. Jadi setiap graf terhubung adalah graf terhubung-titik-1. Kiranya jelas bahwa graf G terhubung-titik- k jika dan hanya jika $\kappa(G) \geq k$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1:



Gambar 1. Graf G dengan $\kappa(G) = 3$

Misalkan G sebuah graf tanpa gelung dan v adalah sebuah titik G dengan $d(v) = \delta(G)$. Misalkan $N_G(v)$ adalah himpunan titik G yang berhubungan langsung dengan v di G . Selanjutnya, $N_G(v)$ disebut persekitaran titik v di graf G . Maka pada graf $G - N_G(v)$ titik v merupakan titik terasing (titik dengan derajat nol) atau graf $G - N_G(v)$ tak terhubung, maka diperoleh lemma berikut:

Lemma 2.1

Jika G graf terhubung, maka

$$1 \leq \kappa(G) \leq \delta(G)$$

■

(Budayasa, 2007).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Kali Kronecker Dua Graf dan Sifat-Sifatnya

Pembahasan pada bab ini akan diawali dengan pengertian tentang hasil kali kronecker dua graf.

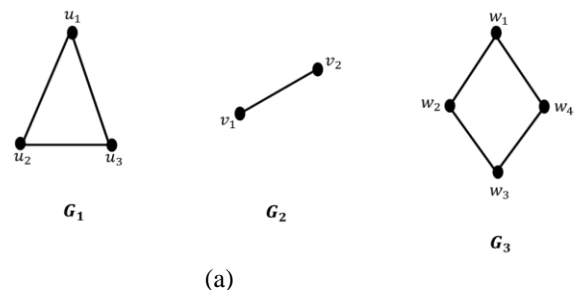
Definisi 3.1

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf sederhana. Hasil kali kronecker G_1 dan G_2 , dilambangkan dengan $G_1 \otimes G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / u_1 u_2 \in E(G_1) \text{ dan } v_1 v_2 \in E(G_2)\}$

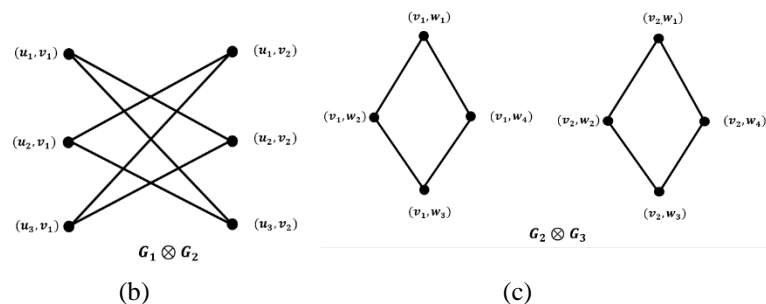
(Ekinci & Kirlangiç, 2015)

Contoh 3.1:

Diberikan graf G_1, G_2 , dan G_3 seperti pada gambar berikut:



Hasil kali kronecker dari graf G_1 dan G_2 dapat dilihat pada Gambar 2(b), sedangkan hasil kali kronecker dari G_2 dan G_3 dapat dilihat pada Gambar 2(c).



Gambar 2. (a) Tiga graf G_1, G_2, G_3 ; (b) Graf $G_1 \otimes G_2$; (c) Graf $G_2 \otimes G_3$

Sebagai akibat langsung dari Definisi 3.1, diperoleh hasil berikut:

Lemma 3.1

Jika G_1 dan G_2 adalah buah graf terhubung, maka

- $|V(G_1 \otimes G_2)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$
- $|E(G_1 \otimes G_2)| = |E(G_1)| \cdot |E(G_2)| \cdot 2$
- Untuk setiap $(u, v) \in V(G_1 \otimes G_2)$,

$$d_{G_1 \otimes G_2}((u, v)) = d_{G_1}(u) \cdot d_{G_2}(v)$$

(Bottreau & Metivier *, 1998).

Dari Contoh 3.1 di atas, terlihat bahwa hasil kali kronecker dari dua graf terhubung bisa merupakan graf terhubung, seperti Gambar 2(b), dan bisa juga merupakan graf tak terhubung, seperti Gambar 2(c).

Sebuah jejak di graf G dari titik v_i ke titik v_k , dilambangkan dengan $v_i \rightarrow v_k$. Sedangkan banyaknya sisi pada jejak $v_1 \rightarrow v_k$, dilambangkan dengan $n(v_1 \rightarrow v_k)$. Selanjutnya kita buktikan teorema berikut:

Teorema 3.2

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf dengan himpunan titik G_1 adalah $\{v_i\}$ dan himpunan titik G_2 adalah $\{w_i\}$. Jika (v_1, w_1) dan (v_2, w_2) dua titik pada $G_1 \otimes G_2$ dan jika terdapat jejak $v_1 \rightarrow v_2$ di G_1 dan jejak $w_1 \rightarrow w_2$ di G_2 sedemikian sehingga $n(v_1 \rightarrow v_2) + n(w_1 \rightarrow w_2)$ genap, maka terdapat jejak $(v_1, w_1) \rightarrow (v_2, w_2)$ di graf $G_1 \otimes G_2$.

Menggunakan Teorema 2, dibuktikan karakterisasi hasil kali kronecker dua graf merupakan graf terhubung seperti berikut:

Teorema 3.3

Misalkan G_1 dan G_2 dua graf terhubung. Graf $G_1 \otimes G_2$ terhubung jika dan hanya jika G_1 atau G_2 memuat siklus ganjil.

Teorema 3.4

Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf terhubung. Jika G_1 dan G_2 tidak memuat siklus ganjil, maka $G_1 \otimes G_2$ merupakan graf tak terhubung dan memiliki tepat dua komponen.

Sebagai akibat dari Teorema 3.4 dan Definisi 3.1, diperoleh hasil berikut:

Akibat 3.5

Misalkan G graf terhubung dan G tidak memiliki siklus ganjil, maka $G \otimes K_2$ mempunyai dua komponen, masing-masing isomorfik dengan G .

B. Konektivitas-Titik Hasil Kali Kronecker Dua Graf

Perhatikan bahwa Teorema 3.3, merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar graf $G_1 \otimes G_2$ merupakan graf terhubung. Berdasarkan Lemma 2.1, jika $G_1 \otimes G_2$ terhubung,

maka $1 \leq \kappa(G_1 \otimes G_2) \leq \delta(G_1 \otimes G_2)$. Selanjutnya dari Lemma 3.1 (iii), $d_{G_1 \otimes G_2}((u, v)) = d_{G_1}(u) \cdot d_{G_2}(v)$ dengan demikian,

$$\begin{aligned} \delta(G_1 \otimes G_2) &= \min\{d_{G_1 \otimes G_2}(u, v) \mid uv \in V(G_1 \otimes G_2)\} \\ &= \min\{d_{G_1}(u) \cdot d_{G_2}(v) \mid u \in G_1 \text{ dan } v \in G_2\} \\ &= \min\{d_{G_1}(u) \mid u \in G_1\} \cdot \min\{d_{G_2}(v) \mid v \in G_2\} \\ &= \delta(G_1) \times \delta(G_2) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh lemma berikut.

Lemma 3.6

Jika graf $G_1 \otimes G_2$ terhubung, maka

$$1 \leq \kappa(G_1 \otimes G_2) \leq \delta(G_1) \times \delta(G_2)$$

Secara umum menentukan formula konektivitas dari $G_1 \otimes G_2$ merupakan persoalan yang sulit. Berikut akan ditentukan nilai $\kappa(G_1 \otimes G_2)$ untuk graf G_1 dan G_2 tertentu.

Selanjutnya akan ditunjukkan jika G_1 dan G_2 masing-masing merupakan graf lengkap, maka batas atas dari $\kappa(G_1 \otimes G_2)$ dalam Lemma 6 dicapai. Untuk itu diperlukan terminologi berikut :

Misalkan $V(K_m) = V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ dan $V(K_n) = V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan $S_i = \{u_i\} \times V_2$, $i = 1, \dots, m$. Selanjutnya (u_i, v_j) ditulis w_{ij} untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$. Sehingga $S_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}\}$, $i = 1, \dots, m$ adalah sebuah himpunan titik-titik independen di $K_m \otimes K_n$ dan $V(K_m \otimes K_n)$ mempunyai sebuah partisi $V_1 \times V_2 = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$. Untuk dua titik u dan v di graf G , kita tulis $u \sim v$ jika $uv \in E(G)$, dan $u \not\sim v$ jika $uv \notin E(G)$.

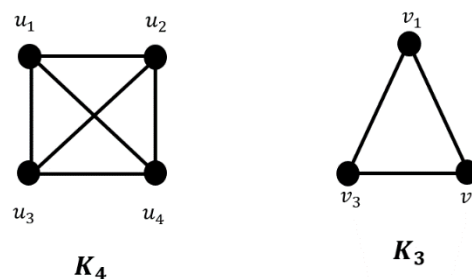
Teorema 3.7

Jika K_m dan K_n dua graf lengkap dengan $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka

$$\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1).$$

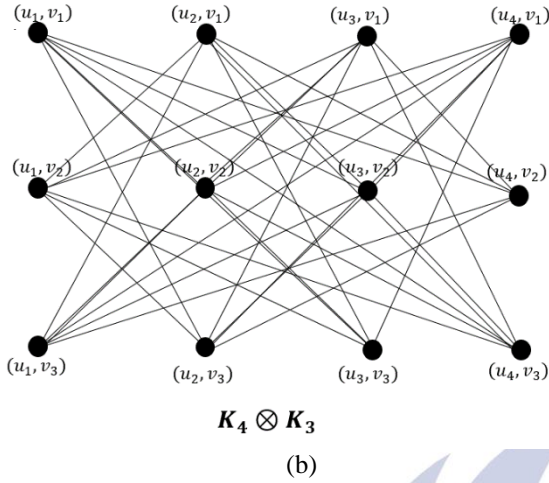
Contoh 3.2:

Diberikan graf K_4 dan K_3 seperti gambar berikut:



(a)

Hasil kali kronecker dari graf K_4 dan graf K_3 dapat dilihat pada Gambar 3(b).



Gambar 3. (a) Graf K_4 dan graf K_3 ; (b) Graf $K_4 \otimes K_3$ dengan $\kappa(K_4 \otimes K_3) = 6$

Perhatikan bahwa:

$V_1 = \{(u_2, v_2), (u_2, v_3), (u_3, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_2), (u_4, v_3)\}$ sebuah himpunan titik-pemutus dengan kardinalitas minimum pada graf $K_4 \otimes K_3$.

Selanjutnya akan dicari konektivitas-titik hasil kali kronecker graf bipartit dan graf komplet. Untuk itu diperlukan terminologi berikut :

Misalkan G graf bipartit dengan bipartisi (X, Y) dan K_n ($n \geq 3$). Misalkan $V(G) = V_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$, $V(K_n) = V_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$, dan himpunan $S_i = V_1 \times \{v_i\}$, $X_i = X \times \{v_i\}$, $Y_i = Y \times \{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sehingga diperoleh $S_i = X_i \cup Y_i$. Seperti sebelumnya, titik (u_i, v_j) di graf $G \otimes K_n$ dilambangkan dengan w_{ij} , untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. maka $S_i = \{w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{mi}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, adalah sebuah himpunan titik independen di $G \otimes K_n$, dan $V(G \otimes K_n)$ mempunyai partisi $V_1 \times V_2 = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$.

Konektivitas hasil kali kronecker antara graf bipartit dan graf komplet diperoleh hasil sebagai berikut:

Teorema 3.8

Jika G adalah graf bipartit dan $n \geq 3$, maka $\kappa(G \otimes K_n) = \min\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\}$.

Jika G graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$, maka $\min\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\} = \min\{n\delta(G), (n-1)\delta(G)\} = (n-1)\delta(G)$

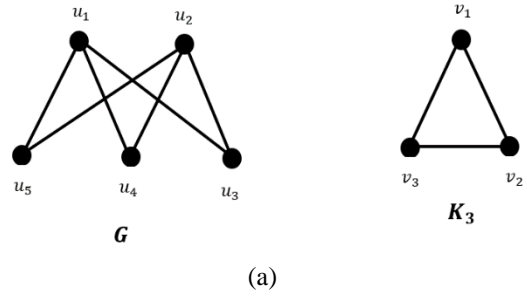
Sehingga akibat langsung dari Teorema 3.8, diperoleh hasil sebagai berikut:

Akibat 3.9

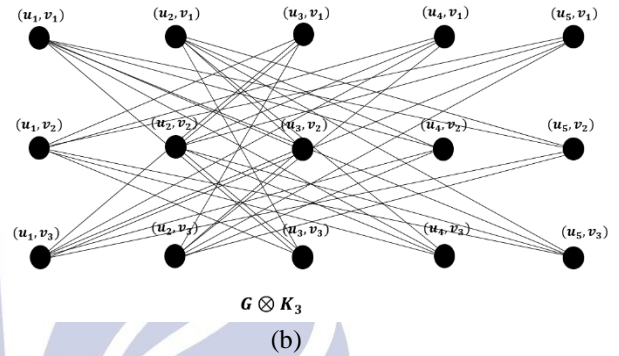
Jika G graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$, maka

$$\kappa(G \otimes K_n) = \delta(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G).$$

Contoh 3.3:



Hasil kali kronecker dari graf G dan graf K_3 dapat dilihat pada Gambar 4(b).



Gambar 4. (a) Graf G dan Graf K_3 ; (b) Graf $G \otimes K_3$ dengan $\kappa(G \otimes K_3) = 4$

Dalam hal ini $\delta(G) = 2$ dan $n = 3$, berdasarkan Akibat 3.9, $\kappa(G \otimes K_3) = (3-1) \cdot 2 = 4$. Perhatikan bahwa $S = \{(u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_2), (u_2, v_3)\}$ adalah sebuah himpunan titik-pemutus minimum pada graf $G \otimes K_3$.

C.Konektivitas-Titik Super Hasil Kali Kronecker Dua Graf

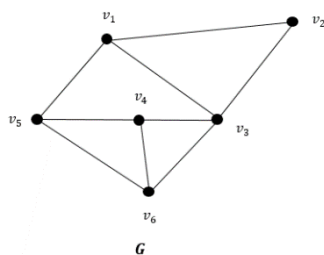
Definisi 3.3

Sebuah himpunan-titik-pemutus S di graf G disebut himpunan-titik-pemutus super (κ -Super), jika $G - S$ tak terhubung dan tidak memuat titik terasing. Definisi ini berakibat bahwa setiap titik $u \in V(G - S)$, maka $N_G(u) \not\subseteq S$. Konektivitas-titik super dari graf G disimbolkan dengan $\kappa_s(G)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\kappa_s(G) = \min\{|S| : S \subseteq V(G) \text{ adalah himpunan-titik-pemutus super dari } G\}.$$

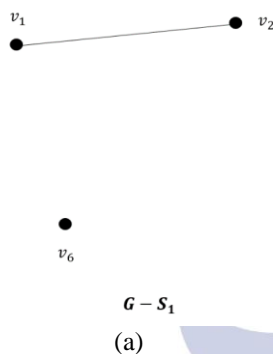
Contoh 3.4:

Perhatikan graf G pada gambar berikut.



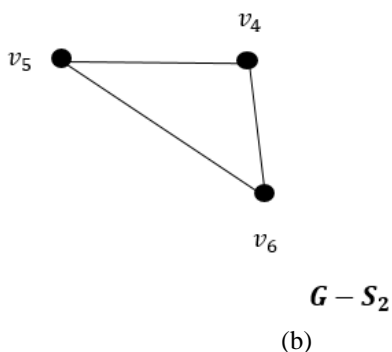
Gambar 5. Graf G terhubung

Jika $S_1 = \{v_3, v_4, v_5\}$ maka $G - S_1$ Graf tak terhubung dengan dua komponen seperti berikut:



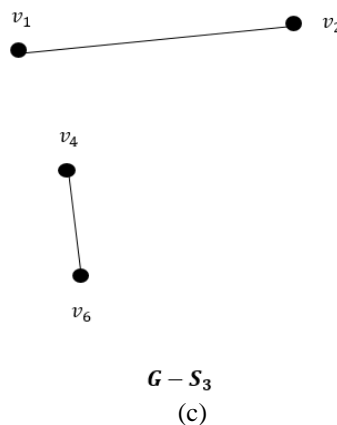
Sehingga S_1 adalah sebuah himpunan titik-pemutus di G . Tetapi S_1 bukan himpunan titik-pemutus super di G karena $G - S_1$ memuat titik terasing yaitu v_6 .

Jika $S_2 = \{v_1, v_3\}$ maka $G - S_2$ Graf tak terhubung dengan dua komponen berikut:



Sehingga S_2 adalah sebuah himpunan titik-pemutus dari G . Tetapi S_2 bukan himpunan titik-pemutus super di G karena $G - S_2$ memuat titik terasing yaitu v_2 .

Jika $S_3 = \{v_3, v_5\}$ maka $G - S_3$ Graf tak terhubung dengan dua komponen



Gambar 6. (a) $G - S_1$; (b) $G - S_2$; (c) $G - S_3$

Sehingga S_3 adalah sebuah himpunan titik-pemutus di G dan S_3 himpunan titik-pemutus super di G karena $G - S_3$ tidak memuat titik terasing.

Mudah diamati bahwa tidak ada himpunan titik-pemutus super dari G yang mempunyai kardinalitas kurang dari dua. Sehingga konektivitas-titik super dari G adalah dua, atau $\kappa_s(G) = 2$.

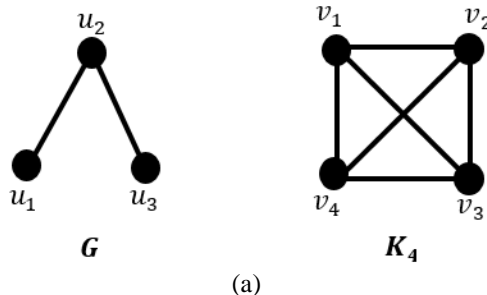
Baru-baru ini, Guo et al mempelajari konektivitas super hasil kali kronecker dari graf bipartit dan graf komplet bahwa $G \otimes K_n$ ($n \geq 3$) adalah κ -super untuk graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$.

Teorema 3.10

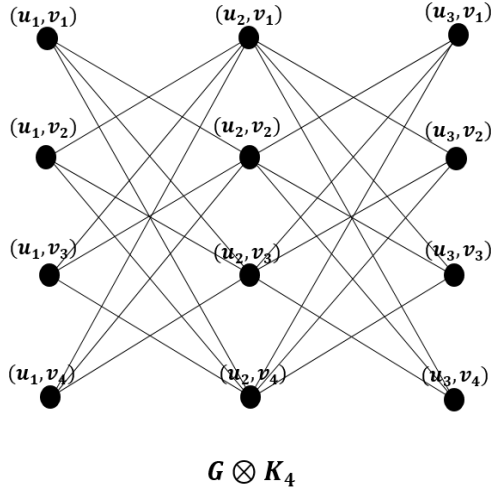
Jika G sebuah graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$, maka $G \otimes K_n$ κ -super.

Contoh 3.5:

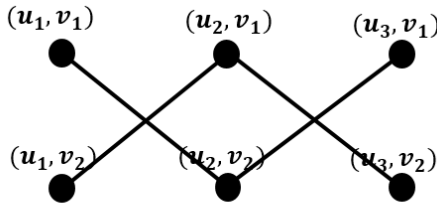
Diberikan graf G dan graf K_4 seperti pada gambar berikut :



Hasil kali kronecker dari graf G dan graf K_4 dapat dilihat pada Gambar 7(b).



(b)



$(G \otimes K_4) - S$

(c)

Gambar 7. (a) Graf G dan Graf K_4 ; (b)Graf $G \otimes K_4$ dengan $\kappa_s(G \otimes K_4) = 6$; (c) Graf $(G \otimes K_4) - S$

Dengan memperhatikan graf $G \otimes K_4$ pada Gambar 7(b), terlihat bahwa:

$S = (u_1, v_3), (u_1, v_4), (u_2, v_3), (u_2, v_4), (u_3, v_3), (u_3, v_4)$ sebagai himpunan-titik-pemutus super pada graf $G \otimes K_4$. Perhatikan bahwa graf $(G \otimes K_4) - S$ pada Gambar 7(c) merupakan graf tak terhubung dengan dua komponen.

Lemma 3.11

Jika $n \geq 3, m \geq 1$ dan $r \geq 1$, maka $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) \leq (n-2)(m+r)$.

Lemma 3.12

Misalkan S himpunan bagian dari $V(K_{m,r} \otimes K_n)$ dan $S_i - S \neq \emptyset$ untuk paling sedikit tiga i yang berbeda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Jika $(K_{m,r} \otimes K_n) - S$ tidak mempunyai titik terasing, maka $(K_{m,r} \otimes K_n) - S$ graf terhubung.

Contoh 3.6:

Perhatikan hasil kali kronecker dari graf $K_{1,2}$ dengan graf K_4 pada Gambar 7.

Misalkan $S = \{(u_2, v_3), (u_2, v_4), (u_3, v_3), (u_3, v_4)\}$.

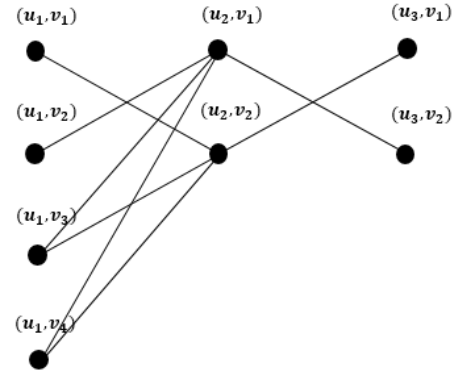
Maka,

$$S_1 - S = S_1 \neq \emptyset$$

$$S_2 - S = S_2 \neq \emptyset$$

$$S_3 - S = \{(u_1, v_3)\} \neq \emptyset$$

Dan graf $(K_{1,2} \otimes K_4) - S$ dapat dilihat pada gambar berikut:



$(K_{1,2} \otimes K_4) - S$

Gambar 8. Graf $(K_{1,2} \otimes K_4) - S$

Graf $(K_{1,2} \otimes K_4) - S$ tidak mempunyai titik terasing dan perhatikan bahwa graf ini terhubung.

Teorema 3.13

Jika $n \geq 3, m \geq 1$ dan $r \geq 1$, maka $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$.

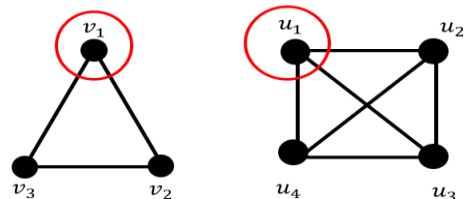
Lemma berikut diperlukan untuk membuktikan lemma selanjutnya.

Lemma 3.14

Jika $n \geq m$, maka $\max \{m, n\} = n$. Jelas $\alpha(K_m \otimes K_n) = n$.

Contoh 3.7:

Perhatikan pada Gambar 9, titik independen pada graf K_3 dan graf K_4 .



$$\alpha(K_3) = 1$$

$$\alpha(K_4) = 1$$

Gambar 9. $\alpha(K_3) = 1, \alpha(K_4) = 1$

Sehingga,

$$\alpha(K_m \otimes K_n) = n.$$

Selanjutnya akan dibahas konektivitas-super hasil kali kronecker dua graf komplet. Marmut dan Vumar mempelajari beberapa parameter kerentanan titik perkalian kronecker dari graf komplet $K_m \otimes K_n$ untuk $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Dalam penelitiannya, $\omega(G - S)$ dilambangkan banyak komponen dari graf $G - S$ dan salah satu hasil utama mereka adalah sebagai berikut.

Lemma 3.15

Misalkan m, n bilangan bulat dengan $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, dan S adalah sebuah himpunan titik-pemutus dari $G = K_m \otimes K_n$.

- Jika $\omega(G - S) = 2$ dan G_1 dan G_2 adalah komponen-komponen dari $G - S$, maka $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 2$ atau $\min\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\} = 1$.
- Jika $\omega(G - S) \geq 3$, maka setiap komponen $G - S$ adalah sebuah titik terasing dan $|S| \geq mn - n$.

Teorema 3.16

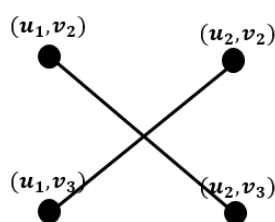
Jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka $\kappa_s(K_m \otimes K_n) = mn - 4$.

Contoh 3.8:

Dengan memperhatikan graf $K_4 \otimes K_3$ pada Gambar 3, terlihat bahwa:

$$S = \{(u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_3, v_1), (u_3, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_1), (u_4, v_2), (u_4, v_3)\}$$

sebagai himpunan titik-pemutus super pada graf $K_4 \otimes K_3$. Perhatikan bahwa $(K_4 \otimes K_3) - S$ merupakan graf tak terhubung dengan dua komponen merupakan graf K_2 seperti gambar berikut :



Gambar 10. Graf $(K_4 \otimes K_3) - S$

4. PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Syarat perlu dan cukup hasil kali kronecker dua graf merupakan graf terhubung, yaitu salah satu dari kedua graf tersebut memuat sebuah siklus ganjil.
- Konektivitas-titik hasil kali kronecker dua graf, yaitu :
 - Jika graf $G_1 \otimes G_2$ terhubung, maka

$$1 \leq \kappa(G_1 \otimes G_2) \leq \delta(G_1) \times \delta(G_2)$$

- Jika K_m dan K_n dua graf komplet dengan $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka

$$\kappa(K_m \otimes K_n) = (m - 1)(n - 1)$$

- Jika G adalah graf bipartit dan $n \geq 3$, maka

$$\kappa(G \otimes K_n) = \min\{n\kappa(G), (n - 1)\delta(G)\}$$

- Jika G graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$, maka

$$\kappa(G \otimes K_n) = \delta(G \otimes K_n) = (n - 1)\delta(G).$$

- Konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf, yaitu:

- Jika $n \geq 3, m \geq 1$ dan $r \geq 1$, maka $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n - 2)(m + r)$

- Jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka $\kappa_s(K_m \otimes K_n) = mn - 4$.

Saran

Hasil yang diperoleh hanya sebatas hasil kali kronecker dari graf komplet dengan graf komplet dan graf bipartit dengan graf komplet. Jika graf G_1 dan G_2 bukan graf-graf komplet maupun graf bipartit komplet, maka penentuan nilai $\kappa(G_1 \otimes G_2)$ maupun nilai $\kappa_s(G_1 \otimes G_2)$ masing-masing merupakan persoalan yang sulit. Untuk itu diberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pembahasan konektivitas-titik hasil kali kronecker dua graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Bottreau, A., & Metivier *, Y. (1998). Some remarks on the Kronecker product of graphs. *Information Processing Letters* 68, 55-61.
- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya : Unesa University Surabaya Press.
- Ekinci*, G. B., & Kırilangıç, A. (2015). Super connectivity of Kronecker product of complete. *Discrete Mathematics* 339, 1950-1953.
- Guji, R., & Vumar, E. (2009). A note on the connectivity of Kronecker products of graphs. *Applied Mathematics Letters* 22, 1360-1363.
- Mamut, A., & Vumar*, E. (2008). Vertex vulnerability parameters of Kronecker products of complete graphs. *Information Processing Letters* 106, 258-262.
- WEICHSEL, P. M. (1962). THE KRONECKER PRODUCT OF GRAF. 47-52.